***Теоретический минимум по линейной алгебре***

**1. Дайте определение линейной формы**  
Линейная форма — это отображение f: V → K, где V — векторное пространство над полем K, линейное по аргументу, то есть f(ax + by) = af(x) + bf(y). Она играет роль в сопряженном пространстве, описывая скалярные свойства векторов.

**2. Что будет являться образом линейной комбинации относительно линейной формы?**  
Образ линейной комбинации ax + by под формой f равен f(ax + by) = af(x) + bf(y). Это следует из линейности, позволяя вычислять значения через отдельные векторы.

**3. Приведите общий вид линейной формы, определяемый координатами вектора-аргумента в произвольном базисе**

В базисе {e1, ..., en} линейная форма f(x) = a1x1 + ... + anxn, где x = x1e1 + ... + xnen, а ai = f(ei). Это выражение связывает форму с координатами вектора.

**4. Что называется коэффициентами линейной формы?**  
Коэффициентами формы f в базисе {ei} называют значения ai = f(ei), взятые на базисных векторах. Они определяют форму в данном базисе полностью.

**5. Как найти значение линейной формы, зная ее коэффициенты в некотором базисе, а также координаты вектора-аргумента в этом же базисе?**  
Значение f(x) равно a1x1 + ... + anxn, где ai — коэффициенты, а xi — координаты x в базисе {ei}. Это простое скалярное произведение двух векторов.

**6. Как определяется равенство линейных форм?**  
Линейные формы f и g равны, если f(x) = g(x) для всех x из V. В базисе это означает равенство коэффициентов f(ei) = g(ei).

**7. Какая линейная форма называется нуль-формой?**  
Нуль-форма — это f, для которой f(x) = 0 при любом x из V. Её коэффициенты в любом базисе равны нулю.

**8. Как определяется сумма линейных форм?**  
Сумма (f + g)(x) = f(x) + g(x) для всех x из V. Коэффициенты суммы в базисе — это f(ei) + g(ei).

**9. Какое пространство называется сопряженным пространством?**  
Сопряженное пространство V\* — это множество всех линейных форм на V с операциями сложения и умножения на скаляр. Оно имеет ту же размерность, что и V.

**10. Какие значения принимает fj(ei), если {ei} и {fj} — сопряженные базисы?**  
Если {ei} — базис V, а {fj} — базис V\*, то fj(ei) = δij (1 при i = j, 0 иначе). Это свойство сопряженности базисов.

**11. Как может быть задан базис сопряженного пространства?**  
Базис V\* задают формы fj, где fj(x) = xj — j-я координата x в базисе {ei}. Тогда fj(ei) = δij, что делает их сопряженными.

**12. Как преобразуются коэффициенты линейной формы при преобразованиях базиса?**  
При переходе к базису e'j = Σ pij ei коэффициенты a'i = Σ pij ai, где P — матрица перехода. Это отражает линейность преобразования.

**13. Как преобразуются базисные линейные формы при преобразованиях базиса?**  
Базисные формы f'j = Σ (P^-1)ji fi, где P^-1 — обратная матрица перехода. Это сохраняет их сопряженность с новым базисом.

**14. Какое пространство называют вторым сопряженным?**  
Второе сопряженное V\*\* — это пространство линейных форм на V\*. Оно изоморфно V в конечномерном случае.

**15. Как может быть установлен изоморфизм между пространством V и вторым сопряженным к нему?**  
Изоморфизм задается отображением x → x̂, где x̂(f) = f(x) для f из V\*. Это биективное соответствие в конечных размерностях.

**16. Какой изоморфизм называют каноническим?**  
Канонический изоморфизм — это x → x̂, где x̂(f) = f(x), не зависящий от базиса. Он естественен и отражает двойственность.

**17. Какое отображение называется билинейной формой?**  
Билинейная форма B: V × V → K линейна по каждому аргументу: B(ax + by, z) = aB(x, z) + bB(y, z). Пример — скалярное произведение.

**18. Как при помощи линейных форм может быть задана билинейная форма?**  
B(x, y) = f(x)g(y), где f, g — линейные формы из V\*. Это частный случай, обобщаемый суммами таких произведений.

**19. Запишите координатное представление любой билинейной формы?**  
B(x, y) = Σ aij xi yj, где aij = B(ei, ej), xi и yj — координаты x и y в базисе {ei}. Это связано с матрицей формы.

**20. Какая билинейная форма называется симметричной?**  
B симметрична, если B(x, y) = B(y, x) для всех x, y. Это свойство важно для квадратичных форм.

**21. Какая билинейная форма называется антисимметричной?**  
B антисимметрична, если B(x, y) = -B(y, x). Тогда B(x, x) = 0 для любого x.

**22. Как может быть найдена симметричная компонента билинейной формы?**  
Bs(x, y) = (1/2)(B(x, y) + B(y, x)) — симметричная часть B. Она всегда удовлетворяет Bs(x, y) = Bs(y, x).

**23. Как может быть найдена антисимметричная компонента билинейной формы?**  
Ba(x, y) = (1/2)(B(x, y) - B(y, x)) — антисимметричная часть B. Она удовлетворяет Ba(x, y) = -Ba(y, x).

**24. Как восстановить билинейную форму, если известны ее симметрическая и антисимметричная компонента?**  
B(x, y) = Bs(x, y) + Ba(x, y), где Bs и Ba — её компоненты. Это разложение уникально.

**25. Какая билинейная форма является симметричной и антисимметричной одновременно?**  
Если B(x, y) = B(y, x) и B(x, y) = -B(y, x), то B(x, y) = 0. Это нуль-форма.

**26. Как могут быть найдены коэффициенты билинейной формы?**  
Коэффициенты aij = B(ei, ej) вычисляются по базисным векторам {ei}. Они составляют матрицу формы.

**27. Как устанавливается изоморфизм между пространством билинейных форм и пространством матриц?**  
B соответствует матрице A, где aij = B(ei, ej), и B(x, y) = xT A y в координатах. Это биективное линейное соответствие.

**28. Какое свойство определяет матрицу, соответствующую симметричной форме?**  
Матрица A симметричной B удовлетворяет A = AT (aij = aji). Это следует из симметрии B.

**29. Какое свойство определяет матрицу, соответствующую антисимметричной форме?**  
Матрица A антисимметричной B удовлетворяет A = -AT (aij = -aji). Это отражает антисимметрию.

**30. Запишите закон преобразования матрицы билинейной формы при преобразовании базиса?**  
При переходе к базису e'j = Σ pij ei матрица A → A' = PT A P, где P — матрица перехода. Это сохраняет значение формы.

**31. Какое отображение называется квадратичной формой?**  
Квадратичная форма Q(x) = B(x, x), где B — симметричная билинейная форма. Она описывает полином второй степени.

**32. Что такое однородный полином степени два и как он связан с квадратичной формой?**  
Это Q(x) = Σ aij xi xj (aij = aji), задающий квадратичную форму. Связь через B(x, x) = Q(x).

**33. Как выглядит квадратичная форма, построенная по антисимметричной билинейной форме?**  
Если B антисимметрична, Q(x) = B(x, x) = 0, так как B(x, x) = -B(x, x). Это всегда нуль.

**34. Как определяется матрица квадратичной формы?**  
Матрица A для Q(x) = xT A x симметрична, где aij = B(ei, ej). Она задает форму в координатах.

**35. Дайте определение полилинейной формы**  
Полилинейная форма f: V1 × ... × Vk → K линейна по каждому аргументу. Пример — смешанное произведение.

**36. Что такое валентность полилинейной формы? Поясните обозначения**  
Валентность (p, q) — число аргументов: p контравариантных (из V), q ковариантных (из V\*). Например, (2, 0) для B: V × V → K.

**37. Какой валентностью обладает скалярное произведение векторов как полилинейная форма?**  
Скалярное произведение x · y имеет валентность (2, 0). Оно билинейно по двум векторам.

**38. Какой валентностью обладает смешанное произведение векторов как полилинейная форма?**  
Смешанное произведение (x × y) · z в R3 имеет валентность (3, 0). Это трилинейная форма.

**39. Как определяется сумма полилинейных форм?**  
(f + g)(x1, ..., xk) = f(x1, ..., xk) + g(x1, ..., xk) для форм одной валентности. Это покомпонентное сложение.

**40. Как определяется произведение полилинейной формы на скаляр?**  
(af)(x1, ..., xk) = a f(x1, ..., xk), где a — скаляр. Это масштабирует значения формы.

**41. Как определяется произведение полилинейных форм?**  
(f · g)(x1, ..., xk+m) = f(x1, ..., xk) g(xk+1, ..., xk+m) для форм валентностей k и m. Это их скалярное умножение.

**42. Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операцией сложения?**  
Множество форм с сложением образует абелеву группу. У него есть нуль и обратные элементы.

**43. Какой алгебраической структурой обладает множество полилинейных форм вместе с операциями сложения и умножения на скаляр?**  
Это векторное пространство над K с операциями сложения и умножения на скаляр. Все аксиомы выполняются.

**44. Обладает ли операция умножения полилинейных форм свойством коммутативности? Поясните ответ**  
Нет, f · g ≠ g · f, так как порядок аргументов меняет результат. Например, f(x)g(y) ≠ g(x)f(y).

**45. Как может быть найден тензор полилинейной формы?**  
Тензор ti1...ik = f(ei1, ..., eik) в базисе {ei} задает форму. Он фиксирует её компоненты.

**46. В чем заключается смысл немого суммирования?**  
Немое суммирование опускает знак Σ, если индекс повторяется вверху и внизу (например, ai bi = Σ ai bi). Это упрощает тензорные записи.

**47. Для какой цели служит тензор полилинейной формы?**  
Тензор описывает форму независимо от базиса и её преобразования. Он удобен для анализа.

**48. Что является тензором билинейной формы?**  
Тензор tij = B(ei, ej) валентности (2, 0) или (0, 2) в зависимости от типа. Это матрица формы.

**49. Что является тензором линейной формы?**  
Тензор ti = f(ei) валентности (1, 0) или (0, 1). Это вектор в V\* или V.

**50. Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования координат вектора?**  
x'i = pi j xj, где pi j — элементы матрицы перехода P. Суммирование идет по j.

**51. Как при помощи немого суммирования записать закон преобразования коэффициентов линейных форм?**  
a'i = aj (P^-1)j i, где P^-1 — обратная матрица перехода. Это ковариантное преобразование.

**52. Запишите закон преобразования компонент тензора полилинейной формы при преобразованиях базиса?**  
t'i1...ip j1...jq = pi1 k1 ... pip kp (P^-1)l1 j1 ... (P^-1)lq jq tk1...kp l1...lq. Это общий закон для валентности (p, q).

**53. Как выглядит закон преобразования тензора типа (2, 0)?**  
t'ij = pi k pj l tkl, где pi k — элементы P. Это контравариантное преобразование.

**54. Как выглядит закон преобразования тензора типа (1, 1)?**  
t'i j = pi k (P^-1)l j tk l — смешанное преобразование. Один индекс вверх, другой вниз.

**55. Как выглядит закон преобразования тензора типа (0, 2)?**  
t'ij = (P^-1)k i (P^-1)l j tkl — ковариантное преобразование. Используется только P^-1.

**56. Какой валентностью будет обладать полилинейная форма валентности (p, q) после операции свертки?**  
После свертки по паре индексов валентность становится (p-1, q-1). Это уменьшает размерность на 2.

**57. Как определяется операция свертки тензора?**  
Свертка — суммирование по паре индексов, например, ti ik → sk = Σ ti ij δj i. Это "сжатие" тензора.

**58. Дайте определение символа Кронекера**  
δi j = 1 при i = j и 0 при i ≠ j. Это тензор для тождественных операций.

**59. Каким свойством обладает символ Кронекера?**  
Он симметричен (δij = δji) и диагонален (δi i = n). Используется в свертках.

**60. Как записывается скалярное произведение при помощи операции свертки?**  
x · y = xi yi (немое суммирование). Это свертка xi yj с δj i.

**61. Дайте определение символа Леви-Чивита**  
εi1...in = +1 для четной перестановки, -1 для нечетной, 0 при повторах. В R3 это ε123 = 1.

**62. Каким свойством обладает символ Леви-Чивита?**  
Он антисимметричен: εijk = -εjik при смене индексов. Это важно для ориентации.

**63. Как записывается векторное произведение при помощи символа Леви-Чивита?**  
(x × y)k = εijk xi yj в R3. Суммирование по i, j дает компоненты.

**64. Запишите способ нахождения смешанного произведения при помощи символа Леви-Чивита**  
(x × y) · z = εijk xi yj zk — скаляр в R3. Это объем параллелепипеда.

**65. Как может быть найден определитель квадратной матрицы при помощи символа Леви-Чивита?**  
det A = εi1...in a1 i1 ... an in для матрицы n × n. В 3D это εijk a1i a2j a3k.

**66. Дайте определение линейному отображению между произвольными пространствами**  
φ: V → W линейно, если φ(ax + by) = aφ(x) + bφ(y). Это обобщает матричные преобразования.

**67. Что называется линейным отображением растяжения?**  
φ(x) = λx, где λ — скаляр, называется растяжением. Оно масштабирует векторы.

**68. Запишите матрицу тождественного отображения**  
Матрица id(x) = x — это I = (δij), единичная матрица. Она сохраняет координаты.

**69. Какой вид имеет матрица проектирования на подпространство параллельно его прямому дополнению?**  
В базисе V = U ⊕ W матрица проекции на U — это (Ik 0; 0 0), где Ik — единичная k × k. Это обнуляет W.

**70. Какой вид имеет матрица оператора растяжения на λ ∈ K?**  
Матрица φ(x) = λx — это λI, где I — единичная. Все элементы диагонали равны λ.

**71. Как может быть найдена матрица линейного отображения?**  
Для φ: V → W в базисах {ei} и {fj}, φ(ei) = Σ aji fj, где A = (aji) — матрица. Это образы базиса.

**72. Покажите как найти координаты образа вектора относительно линейного отображения, если оно задано матрицей**  
Если φ задано A, а x = Σ xi ei, то yj = Σ aji xi — координаты φ(x). Векторно: y = A x.

**73. Какой алгебраической структурой наделено множество линейных отображений с введенными операциями сложения и умножения на скаляр?**  
Hom(V, W) с (φ + ψ)(x) = φ(x) + ψ(x) и (aφ)(x) = aφ(x) — векторное пространство. Оно замкнуто под этими операциями.

**74. Какому матричному пространству изоморфно множество HomK(X, Y)? Поясните введенные обозначения**  
HomK(X, Y) — линейные отображения X → Y, изоморфно Matm×n, где m = dim Y, n = dim X. Это следует из матричного представления.

**75. Что такое композиция линейных отображений?**  
φ ∘ ψ: X → Z — это (φ ∘ ψ)(x) = φ(ψ(x)) для ψ: X → Y, φ: Y → Z. Она тоже линейна.

**76. Как найти матрицу линейного отображения, если оно задано как композиция отображений φ и ψ?**  
Матрица φ ∘ ψ равна Aφ Aψ, где Aψ — матрица ψ, Aφ — матрица φ. Это произведение матриц.

**77. Запишите закон преобразования матрицы линейного отображения при замене базиса**  
При смене базисов с P в V и Q в W матрица A → A' = Q^-1 A P. Это учитывает новые координаты.